Coordonatori
DANA HEUBERGER NICOLAE MUŞUROIA

Nicolae Muşuroia Gheorghe Boroica Vasile Pop
Dana Heuberger Florin Bojor

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a X-a

Ediţia a II-a, revizuită

ÎNVĂŢARE DE EXCELENŢĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

CAPITOLUL 1. ECUAŢII EXPONENŢIALE ŞI LOGARITMICE NONSTANDARD

Noţiunile „problemă standard" şi „problemă nonstandard" sunt relative. Orice problemă a cărei rezolvare nu este cunoscută, poate reprezenta, la un moment dat, o problemă nonstandard.

Vom numi problemă nonstandard o problemă a cărei rezolvare nu se bazează pe un algoritm cunoscut. Prin urmare, nu există metode generale de rezolvare a acestor probleme. Vom indica câteva direcţii de abordare. Tehnicile utilizate apelează la: studiul monotoniei, studiul convexităţii unor funcţii, inegalităţi clasice etc.

UTILIZAREA MONOTONIEI UNOR FUNCŢII

1.1. Propoziţie. Dacă funcţia f este strict monotonă pe intervalul I din $\mathbb{R}$, iar c este o constantă reală, atunci ecuaţia $f(x) = c$ are pe intervalul I cel mult o soluţie.

Demonstraţie: Fie f o funcţie strict crescătoare. Presupunem că ecuaţia $f(x) = c$ are pe intervalul I cel puţin două soluţii diferite x_1, x_2. Fie $x_1 < x_2$. Deoarece pe intervalul I f este strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Contradicţie cu $f(x_1) = f(x_2) = c$.

Analog, dacă f este funcţie strict descrescătoare.

1.2. Propoziţie. Dacă funcţiile f şi g sunt monotone pe intervalul I, de monotonii diferite, cel puţin una dintre ele fiind strict monotonă, atunci ecuaţia $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluţie pe intervalul I.

Demonstraţie: Fie f strict crescătoare, iar g descrescătoare pe intervalul I. Presupunem că există cel puţin două soluţii diferite x_1, x_2, din intervalul I, ale ecuaţiei $f(x) = g(x)$. Fie $x_1 < x_2$. Din f strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$.

Dar: $f(x_1) = g(x_1) \geq g(x_2) = f(x_2)$, deci contradicţie.

Amintim, fără demonstraţie, alte câteva rezultate cunoscute din teoria funcţiilor.

1.3. Propoziţie. Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Dacă f şi g sunt funcţii strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci $f + g$ este o funcţie strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

b) Dacă $f, g : A \to (0, \infty)$ sunt funcţii strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci $f \cdot g$ este o funcţie strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

1.4. Propoziţie. Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$.

a) Dacă f şi g sunt funcţii strict crescătoare, atunci $g \circ f$ este o funcţie strict crescătoare.

b) Dacă f şi g sunt funcţii strict descrescătoare, atunci $g \circ f$ este o funcţie strict crescătoare.

c) Dacă f şi g sunt funcţii strict monotone, dar de monotonii diferite, atunci $g \circ f$ este o funcţie strict descrescătoare.

Vom exemplifica cele spuse mai sus, rezolvând următoarele ecuaţii:

1.5. Exemplu. Rezolvaţi ecuaţia: $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$.

O.J., Arad, 1993

Soluţie: Împărţim ambii membri cu 13^x. Ecuaţia devine:

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x.$$

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ este strict descrescătoare, iar funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x$ este strict crescătoare. Atunci ecuaţia $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluţie. Cum $x = 2$ verifică ecuaţia, deducem că aceasta este unică.

1.6. Exemplu. Rezolvaţi ecuaţia: $4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} = 275.$

Soluţie: Pentru $x < 0$, $4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} < 2$, deci ecuaţia nu are soluţii. Fie $x > 0$. Considerăm funcţia $f_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x) = a^{x+\frac{1}{x}}$, $a > 1$. Atunci $f_a = g \circ h$, unde $h:(0,\infty)\to[2,\infty)$, $h(x) = x + \frac{1}{x}$, iar $g:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = a^x$. Se constată că h este funcţie strict descrescătoare pe $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, \infty)$, iar g este funcţie strict crescătoare. Din Propoziţia .4. deducem că funcţia f_a este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Din Propoziţia 1.3. deducem că funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = 4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} = f_4(x) + f_9(x)$ este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, \infty)$. În concluzie ecuaţia $F(x) = 275$ are cel mult câte o soluţie pe intervalele $(0, 1]$, respectiv $[1, \infty)$. Se verifică că $x = \frac{1}{2} \in (0, 1]$ şi $x = 2 \in [1, \infty)$ sunt soluţii. Prin urmare soluţiile ecuaţiei date sunt $x = \frac{1}{2}$ şi $x = 2$.

1.7. Exemplu. Fie $a \in (0, \infty)$.

a) Studiaţi monotonia funcţiei $f_a:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f_a(x) = (1+a)^x - a^x$.

b) Pentru $a \in (0, \infty)$, fixat, rezolvaţi în $[0, \infty)$, ecuaţia:

$$(a+1)^x - a^x = 1 + 3\cdot\left(a^{\frac{x}{3}} + a^{\frac{2x}{3}}\right).$$

Soluție: a) Pentru $a \in (0, 1)$, funcția $g(x) = (1+a)^x$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$, iar funcția $h(x) = -a^x$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

Atunci $f_a = g + h$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

Pentru $a = 1$, $f_1(x) = 2^x - 1$, care este funcție strict crescătoare.

Pentru $a \in (1, \infty)$ avem $f_a(x) = a^x \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x - 1\right]$.

Din $1 + \frac{1}{a} > 1$, rezultă că funcția $g_1(x) = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^x - 1$ este strict crescătoare și pozitivă pe $[0, \infty)$. Cum și funcția $h_1(x) = a^x$ este strict crescătoare și pozitivă pe $[0, \infty)$, rezultă că și funcția $f_a = g_1 \cdot h_1$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

În concluzie, funcția f_a este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

b) Ecuația se scrie $\left((1+a)^{\frac{x}{3}}\right)^3 = \left(1 + a^{\frac{x}{3}}\right)^3$, $x \in [0, \infty)$.

De aici obținem: $(1+a)^{\frac{x}{3}} = 1 + a^{\frac{x}{3}} \Leftrightarrow f_a\left(\frac{x}{3}\right) = f_a(1)$.

Funcția f_a fiind injectivă pe $[0, \infty)$, rezultă că unica soluție a ecuației date este $x = 3$.

METODA CONSTANTEI SEPARATOARE

Metoda constantei separatoare sau metoda minimaximului se bazează în principal pe evaluarea ambilor membri ai ecuației.

Fie dată ecuația $f(x) = g(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$. Să admitem că se cunoaște că $f(x) \leq \alpha$, iar $g(x) \geq \alpha$, pentru orice $x \in I$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este o constantă. Este evident că ecuația dată are soluții dacă și numai dacă sistemul de ecuații $\begin{cases} f(x) = \alpha \\ g(x) = \alpha \end{cases}$, $x \in I$ este compatibil.

Evident partea dificilă o reprezintă determinarea constantei α. Nu sunt reguli generale. În principiu se utilizează proprietățile funcțiilor *f* și *g*. Următoarele exemple sunt ilustrative în acest sens:

1.8. Exemplu. Rezolvați ecuația: $2\cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

Soluție: Avem inegalitățile: $2\cos^2 \frac{x^2 + x}{6} \leq 2$ și $2^x + 2^{-x} \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.